



Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

**Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)**

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

**МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ
КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ**

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

**Полтава
ПУЕТ
2015**

ЕФЕКТИВНІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНОГО ГІБРИДНОГО АЛГОРИТМУ ФАКТОРИЗАЦІЇ РОЗРІДЖЕНИХ МАТРИЦЬ

В. А. Сидорук, молодший науковий співробітник

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

wolodymyr.sydoruk@gmail.com

Розглядається новий гібридний алгоритм розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженими симетричними додатно-визначеними матрицями на комп'ютерах гібридної архітектури з багатоядерними (CPU) процесорами і графічними (GPU) прискорювачами.

Розглянемо задачу

$$Ax = b \quad (1)$$

з симетричною додатно-визначеною розрідженою матрицею порядку n .

Суть гібридного алгоритму полягає в попередньому приведення вихідної матриці A до блочно-діагональної матриці з обрамленням \tilde{A} та наступній факторизації приведенної матриці [1,2].

Таким чином, задача розв'язування вихідної задачі (1) зводиться до розв'язування еквівалентної задачі

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad (2)$$

де $\tilde{x} = P^T x, \tilde{b} = P^T b$, P - ортогональна матриця перестановок.

Найбільш ефективним прямим методом розв'язання такої задачі є, як відомо, метод Холецького [1-3]. Розв'язання системи (2) полягає в розв'язанні підзадач: трикутне розвинення матриці системи (3), розв'язання двох СЛАР з трикутними матрицями (4) та (5):

$$\tilde{A} = \tilde{L} * \tilde{L}^T \quad (3)$$

$$\tilde{L}y = \tilde{b} \quad (4)$$

$$\tilde{L}^T \tilde{x} = y \quad (5)$$

Оскільки в загальному випадку складність наведеного

алгоритму визначається в основному складністю трикутного розвинення матриці, наступні викладки будуть стосуватись саме етапу факторизації.

Розглянемо гібридний алгоритм LL^T -факторизації [4]. Припустимо, що кількість CPU і GPU, які використовуються однакова – p . Тоді для знаходження величини прискорення та ефективності паралельного алгоритму скористуємось наступними формулами:

$$S_p = T_1 / T_p, E_p = S_p / p,$$

де T_p – час розв'язування задачі на гібридному комп'ютері з використанням p CPU і p GPU, T_1 – час розв'язування тієї ж задачі на гібридному комп'ютері з одним CPU та одним GPU.

Враховуючи, що основна частина обчислень в алгоритмі реалізуються на GPU, для обчислення часових характеристик можна використовувати наступні формули.

$$T_1 = Nt_g, T_g = Nt_g + M_1t_{opg} + M_2t_{opp} + Q_1t_{cpg} + Q_2t_{cpg},$$

де N – кількість арифметичних операцій, t_g – середній час виконання однієї арифметичної операції на GPU, t_{opp} – час, необхідний для обміну одним машинним словом між двома процесами, t_{opg} – час обміну між CPU і GPU, t_{cpg} – час, який потрібен для встановлення зв'язку між двома процесами, t_{cpg} – час, який потрібен для встановлення зв'язку між CPU і GPU, M_i , Q_i – кількість відповідних обмінів та синхронізацій.

Обчислення прискорення алгоритму розглянемо у випадку, коли діагональні блоки крім останнього зберігаються в стрічковому форматі. (Вважається, що кількість наддіагоналей k у всіх діагональних блоках крім останнього однакова.)

Слід зазначити, що складність гібридного алгоритму факторизації одного діагонального блоку з [5] визначається в основному графічною складовою обробки матриці на GPU.

Тоді головні члени для визначення кількості арифметичних операцій обчислюються наступним чином: кількість операцій для факторизації діагонального блоку – $1/2qk^2$; розв'язання трикутної системи – $2qsk$; знаходження добутку – $2q^2s$; факторизація останнього діагонального блоку реалізується за $\frac{1}{3}s^3$ арифметичних операцій, де s -порядок останнього

діагонального блоку, q -порядок всіх діагональних блоків крім останнього.

Тоді

$$T_I = ((p-1)\alpha + \beta)t_g,$$

$$\text{де } \alpha = \left(\frac{1}{2}qk^2 + 2qsk + 2q^2s \right), \beta = \frac{1}{3}s^3.$$

Тоді

$$T_p = (\alpha + \beta)t_g + \left\lfloor \frac{s^2(p-1)}{2} \right\rfloor t_{opp} + s^2 p t_{opg} + \left\lfloor \frac{(p-1)}{2} \right\rfloor t_{cpp} + p t_{cgg},$$

Оскільки, практично s набагато менше q , приходимо до

$$S_p \approx \frac{(p-1)}{1 + \left\lfloor \frac{s^2(p-1)}{2} \right\rfloor t_{opp} + s^2 p t_{opg} + \left\lfloor \frac{(p-1)}{2} \right\rfloor t_{cpp} + p t_{cgg}},$$

$$E_p = \frac{S_p}{p}.$$

Література

1. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 334 с.
2. А. Н. Химич, А. В. Попов, В. В. Полянко: Алгоритмы параллельных вычислений для задач линейной алгебры с матрицами нерегулярной структуры // Кибернетика и систем. Анализ. – 2011. – 47, № 6. – С. 159-174.
3. Уилкинсон Дж. Х., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с.
4. Хіміч О. М., Сидорук В. А. Гібридний алгоритм LL^T – факторизації розрідженої матриці. – Режим доступу: <http://hpc-ua.org/hpc-ua-14/files/proceedings/10.pdf>
5. Хіміч О. М., Баранов А. Ю. Гібридний алгоритм розв'язування лінійних систем зі стрічковими матрицями прямими методами // Комп'ютерна математика. – 2013. – № 2. – С. 80-88.